INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION

# MATHÉMATIQUES I (4 h)

1982

## Option économique

### I

1° Calculer $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$.

2° Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \int_0^{\pi} x^n \sin x \, dx$.

*a.* Calculer $A_0$.

*b.* Calculer $A_1$.

*c.* Calculer $A_n$.

### II

On désigne par $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies et continues sur l'intervalle fermé $[0, \pi]$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.

$g$ étant un élément donné de $\mathcal{F}$ et $\lambda$ un paramètre réel non nul, on se propose de déterminer l'ensemble $S_\lambda$ des éléments $f$ de $\mathcal{F}$ qui, pour tout $x \in [0, \pi]$, satisfont la relation :

(1) $$\lambda f(x) + f(0) - (\sin x) \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = g(x)$$

1° Supposant $\lambda \neq -1$ et $S_\lambda \neq \varnothing$, soit $f \in S_\lambda$.

Montrer que $f(0)$ est déterminé de manière unique par $g$.

En déduire que la relation (1) se réduit alors à la relation plus simple :

(2) $$\lambda f(x) - (\sin x) \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = g_\lambda(x) \qquad \text{où } g_\lambda \in \mathcal{F}$$

2° Gardant les mêmes hypothèses, on suppose en outre que $\lambda \neq \frac{\pi}{2}$.

Montrer que le réel $\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt$ est alors déterminé de manière unique par $g_\lambda$. (On formera l'expression $\int_0^{\pi} g_\lambda(x) \sin x \, dx$.)

En déduire que, dans ce cas, $S_\lambda$ ne peut contenir qu'un seul élément, que l'on explicitera sous la forme d'une combinaison linéaire des éléments $e_1$, $e_2$, $e_3$ de $\mathcal{F}$ définis par :

$$\left.\begin{aligned} e_1(x) &= 1 \\ e_2(x) &= \sin x \\ e_3(x) &= g(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour tout } x \in [0, \pi]$$

3° Vérifier que cet élément appartient bien à $S_\lambda$.

4° Montrer que $S_{\frac{\pi}{2}}$ est vide sauf si $\int_0^{\pi} g_{\frac{\pi}{2}}(x) \sin x \, dx = 0$.

Cette condition étant supposée remplie, montrer que :

$$S_{\frac{\pi}{2}} = \left\{ f \in \mathcal{F} / f = \frac{-4g(0)}{\pi(\pi+2)} e_1 + \alpha e_2 + \frac{2}{\pi} e_3 \, , \, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

.../...

On pourrait d'une manière analogue obtenir $S_{-1}$. Mais voici une autre façon de traiter ce problème. Il ressort en effet de la forme même de la relation (1) que les éléments de $S_\lambda$ sont toujours, lorsqu'ils existent, des combinaisons linéaires de $e_1$, $e_2$, $e_3$.

On peut donc se contenter de rechercher les éléments de $S_\lambda$ dans le sous-espace vectoriel $F_g$ de $\mathcal{F}$ engendré par $e_1$, $e_2$, $e_3$.

On supposera seulement que $e_1$, $e_2$, $e_3$ forment une famille libre de $\mathcal{F}$.

## III

Soit $\varphi_\lambda$ l'application de $F_g$ dans lui-même définie par :

$$\varphi_\lambda(f) = \lambda f + f(0)\, e_1 - \left( \int_0^\pi f(t) \sin t \, dt \right) e_2$$

1° Montrer que $\varphi_\lambda$ est une application linéaire de $F_g$ dans $F_g$.

Expliciter sa matrice M relativement à la base ordonnée $(e_1, e_2, e_3)$ de $F_g$.

(On notera : $g(0) = a$ et $\int_0^\pi g(x) \sin x \, dx = b$)

2° Ecrire la relation (1) sous forme matricielle et en déduire un système d'équations linéaires.

(On écrira : $f = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$)

3° Retrouver $S_\lambda$ lorsque $\lambda \notin \left\{ -1, \frac{\pi}{2} \right\}$.

4° Déterminer $S_{-1}$.

## IV

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Dans une urne contenant $n$ boules rouges, $n$ boules noires et $n$ boules blanches, on fait un prélèvement aléatoire de $n$ boules.

Les différents prélèvements possibles sont supposés équiprobables. Le prélèvement sera dit « bon » s'il contient au moins une boule de chaque couleur.

1° Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge dans ce prélèvement?

2° Soit $p_n$ la probabilité pour que le prélèvement soit bon.

Calculer $p_3$, $p_6$, $p_{10}$ à $10^{-2}$ près.

3° Montrer que la suite $(p_n)_{n \geq 3}$ est strictement croissante.

4° Pourquoi sait-on dès maintenant que cette suite converge ?

5° Calculer sa limite.

6° $n$ étant fixé, soit $X_k$ le nombre de bons prélèvements dans une série de $k$ tirages successifs (avec remise). Reconnaître la loi de $X_k$ et indiquer son espérance mathématique, sa variance et son écart type.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail